

立人高級中學 114 學年度第 1 學期高二文組數學 B 科第二次定期評量試題

範圍：龍騰版第三冊(B)單元 3~5

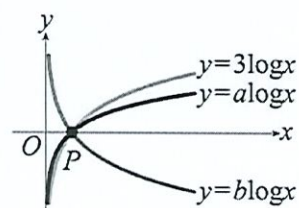
※題目卷共 4 頁！

一、單選題 (每題 3 分，共 15 分)

- () 已知 $a > 0$ ，下列關於 $y = a^x$ 圖形的敘述，何者錯誤？
(A) 必通過 $(0,1)$ (B) 為遞增圖形 (C) 在 x 軸上方 (D) 與 $y = (\frac{1}{a})^x$ 對稱於 y 軸 (E) 與 $y = -a^x$ 對稱於 x 軸
- () 關於對數 $\log_{x-1}(-x^2 + 5x - 4)$ ，下列哪一個數使對數有意義？
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
- () 若 $A(3,a)$ 、 $B(5,b)$ 、 $C(7,c)$ 為 $y = -\log x$ 圖形上三點，則 a 、 b 、 c 的大小關係為何？
(A) $a > b > c$ (B) $c > b > a$ (C) $b > a > c$ (D) $b > c > a$ (E) $a > c > b$
- () 已知 $\log a = 2.3$ ， $\log b = 2.5$ ， $\log c = 2.7$ ，試問 a 、 b 、 c 的大小次序為何？
(A) $c < b < a$ (B) $a < b < c$ (C) $b < c < a$ (D) $b < a < c$ (E) $c < a < b$
- () 設 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ ， $a \neq 1$)，則下列何者恆成立？
(A) $f(x) + f(y) = f(x+y)$ (B) $f(x) - f(y) = f(x-y)$ (C) $f(x) \times f(y) = f(x \times y)$
(D) $f(x) \div f(y) = f(\frac{x}{y})$ (E) $(f(x))^y = f(xy)$

二、多選題：(每題 5 分，只錯一個選項得 3 分，錯 2 個選項得 1 分，錯 3 個以上得 0 分，共 10 分)

- () 試選出正確的選項。
(A) 若點 $(0.03, k)$ 在 $y = \log x$ 的圖形上，則 $k < 0$
(B) 使 $7^x = 3$ 成立之 x 恰有一個，且此 $x = \log_7 3$
(C) $7^{0.6} > 7^{0.5}$
(D) $\log 0.6 > \log 0.5$
(E) $\log(9^5 + 9) = \log 9^5 \times \log 9$
- () 對數函數 $y = 3 \log x$ ， $y = a \log x$ ， $y = b \log x$ 的圖形如右下，
其中 $y = 3 \log x$ 與 $y = b \log x$ 的圖形對稱於 x 軸，選出所有正確的選項
(A) P 點坐標為 $(1, 0)$
(B) 點 $(0.01, k_1)$ 、 $(0.01, k_2)$ 分別在 $y = 3 \log x$ ， $y = a \log x$ 的圖形上，則 $k_1 < k_2$
(C) $b = -\frac{1}{3}$
(D) $a > 3$
(E) 任一條水平線與 $y = b \log x$ 的圖形恰交於一點。



三、填充題：(配分如下，共 67 分)

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
分數	4	8	12	16	20	24	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67

- 解方程式 $2^{x-1} = 16\sqrt{2}$ ， $x =$ _____。
- 解方程式 $(\sqrt[3]{4})^{4-2x} = 128\sqrt{2}$ ， $x =$ _____。
- 解方程式 $4^{x+1} - 25 \times 2^x - 56 = 0$ ， $x =$ _____。
- 解不等式 $(0.3)^{x^2-x} > (0.09)^{2x+3}$ 解為_____。
- 解不等式 $3^{2x+1} - 7 \times 3^x - 6 < 0$ 解為_____。
- 求 $\log \frac{4}{3} + \log \frac{105}{2} - \log 7 =$ _____。
- 求 $\frac{1}{\log_4 6} + \frac{1}{\log_9 6} =$ _____。
- 不等式 $\log(x-3) < 0$ 的解為_____。
- 已知 $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$ ，且 $f(a) - f(b) = 6$ ，求 $\frac{a}{b} =$ _____。
- 不等式 $\log(x-1) + \log(x-3) \leq 3\log 2$ 的解為_____。
- 若 $2^a = 5^b$ ，且 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$ ，則 $2^a \cdot 5^b =$ _____。

12. 有兩個正實數 a 、 b ，已知 $ab^2 = 10^5$ ， $a^2b = 10^3$ ，則 $\log b =$ _____。(化為最簡分數)

13. 聲音的強度是以每平方公尺多少瓦特 (W/m^2) 衡量，而分貝(s)是聲音的單位，且其與聲音強度(w)的關係如下：

$$s = 10 \times \log \frac{w}{10^{-12}}。$$

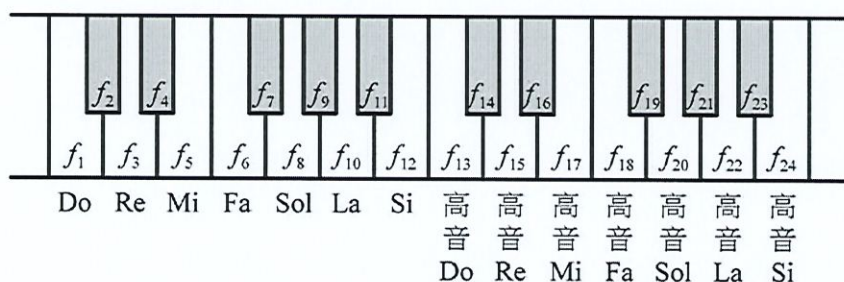
吹管樂器中的「笙」是經由氣流通過簧片引起管柱振動而發聲，音色非常秀麗甜美，也是目前傳統民族樂器中唯一可以吹奏出和聲的樂器。已知一支笙發出的最大聲音可達 40 分貝，某國樂團中有五位團員的樂器為笙，則此五人合奏時最大聲音可達 _____ 分貝。(已知 $\log 5 \approx 0.7$)

14. 已知殺菌劑本達樂 (Benalaxyl) 殘留於植物表面上的半衰期平均為 5 天，依食品安全衛生管理法—農藥殘留容許量標準的規定，本達樂在結球萵苣表面上的殘留容許值是 1 毫克/公斤以下，試問一顆 1000 公克的結球萵苣在噴灑本達樂 0.02 公克後，至少需 _____ 天才能採收。($\log 2 \approx 0.3010$)

15. 海嘯是一種有強大破壞力的海浪，其強度規模的等級 I 與該海嘯的平均海浪高度 H (公尺) 有著以下關係式：

$$I = \frac{1}{2} + \log_2 H。若一層樓約為 3 公尺高，則海嘯等級 4.9 的平均海浪高度約為 _____ 層樓高。($2^{0.4} \approx 1.32$)$$

16. 鋼琴鍵盤上每個鍵的頻率 f_k ，如下圖所示。



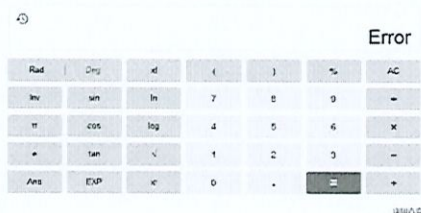
已知頻率之間的關係為 $\log \frac{f_n}{f_1} = \frac{n-1}{12} \times \log 2$ ， $n = 1, 2, \dots, 24$ 。

若知名歌手 J. J. Lin 的歌曲「修煉愛情」，其歌曲的副歌演唱音域為 Mi 到高音 Sol，若「高音 Sol 的頻率」是「Mi 的頻率」的 a^k 倍，則 $(a, k) =$ _____。

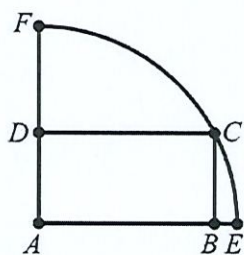
17. 做某項試驗共有三種可能的結果，其發生的機率分別為 $\log_4 k$ ， $\log_8 k$ ， $\log_{64} k$ ，求實數 $k =$ _____。

18. 二圖形 $\Gamma_1: y=2^x$, $\Gamma_2: y=3^x$ 與直線 $y=6$ 分別交於 $A(a,b)$ 、 $B(c,d)$ 兩點，則 $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} =$ _____。

19. 在 Google 計算機輸入沒有意義的數時，會呈現如圖所示的 Error。若已知輸入的數字為 $\log(x^2 - 9x + 18)$ ，且 x 為正整數 1~9，結果 Google 計算機呈現 Error，求所有有可能的 x 值總和為_____。

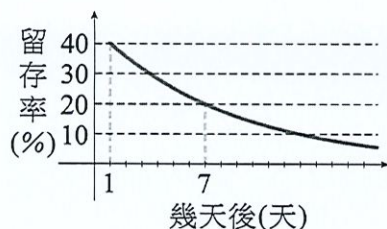


20. 如下圖： A 點是四分之一圓的圓心， $ABCD$ 是矩形，且 $\overline{AD} = 30\log_3 4$ ， $\overline{BD} = 20\log_3 72$ ，則 $\overline{DF} =$ _____。



四、計算題（每小題 4 分，共 8 分）

某款 App 的新增用戶中，在 x 天後仍啟動該 App 的人數比例 $r(x)\%$ ，叫做 x 天後留存率，而 $r(x)$ 稱為留存函數。一般而言，留存函數 $r(x)$ 的曲線會快速下降，如圖所示，經常被用來檢驗用戶的活躍程度。



此 App 的留存函數 $r(x)$ 滿足 $r(1)=40$ 及 $r(7)=20$ （即 1 天與 7 天後的留存率為 40%與 20%），且留存函數 $r(x)$ 符合 $r(x)=\alpha \times 2^{\beta(1-x)}$ 的數學模型，試回答下列問題：

- (1) 試求 $r(13)$ 的值 = _____。（無計算過程不給分）
- (2) 留存率有個 40-20-10 法則是指：「1 天、7 天及 31 天後的留存率都不得低於 40%、20%及 10%」。試判斷該款 App 是否符合 40-20-10 法則？（請完整說明理由）

立人高級中學 114 學年度第 1 學期高二文組數學 B 科第二次定期評量答案卷

_____年_____班 座號：_____ 姓名：_____

範圍：龍騰版第三冊(B)單元 3~5

一、單選題：(每題 3 分，共 15 分)

1	2	3	4	5
B	C	A	B	E

二、多選題：(每格 5 分，只錯一個選項得 3 分，錯 2 個選項得 1 分，錯 3 個以上得 0 分，共 10 分)

1	2
ABCD	ABE

三、填充題：

格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
分數	4	8	12	16	20	24	28	31	34	37	40	43	46	49	52	55	58	61	64	67

1	2	3	4	5
$\frac{11}{2}$	$-\frac{29}{8}$	3	$-1 < x < 6$	$x < 1$
6	7	8	9	10
1	2	$3 < x < 4$	27	$3 < x \leq 5$
11	12	13	14	15
10	$\frac{7}{3}$	47	22	7
16	17	18	19	20
$(2, \frac{5}{4})$	2	6	18	40

四、計算題(每小題 4 分，共 8 分，無計算過程不給分)

(1) 將 $r(1)=40$ 及 $r(7)=20$ 代入數學模型，得

$$\begin{cases} r(1) = \alpha \times 2^{\beta(1-1)} = 40 \\ r(7) = \alpha \times 2^{\beta(1-7)} = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 40 \\ 40 \times 2^{\beta(1-7)} = 20 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 40, \beta = \frac{1}{6}。 (有算出 \alpha, \beta 各得 1 分)$$

因為 $r(x) = 40 \times 2^{\frac{1}{6}(1-x)}$ ，所以 $r(13) = 40 \times 2^{\frac{1}{6}(1-13)} = 40 \times 2^{-2} = 10$ 。(2 分)

(2) 根據題意， $40-20-10$ 法則的前兩個已經滿足，現在檢驗第三個，計算得

$$r(31) = 40 \times 2^{\frac{1}{6}(1-31)} = 40 \times 2^{-5} = \frac{40}{32} = \frac{5}{4} < 10。 (此算式沒寫出，此題不給分)$$

因為第三個條件不成立，所以不符合 $40-20-10$ 法則。